

## **MODELLISTICA MATEMATICA NON LINEARE: UN FRAMEWORK OTTIMALE PER IL SETTORE BANCARIO E FINANZIARIO. SPUNTI OPERATIVI ED APPLICAZIONI AL CONTENZIOSO DI SETTORE<sup>⊗</sup>**

FRANCESCO RUNDO, AGATINO LUIGI DI STALLO

SOMMARIO: 1. Modellistica matematica e diritto - 2. Matematica applicata al settore bancario - 3. L'attuale assetto normativo del settore bancario. - 4. Applicazioni pratiche di modellistica matematica applicata al settore bancario - 5. Matematica applicata al settore finanziario. - 6. L'attuale assetto normativo del settore finanziario. - 7. Applicazioni pratiche di modellistica matematica applicata al settore finanziario. - 8. Introduzione alle problematiche del credito: NPLs e rischio default. - 9. Modelli matematici per la valutazione ottimale del rischio creditizio. - 10. Conclusioni e spunti operativi. - 11. Bibliografia.

1. Mai lasciarsi ingannare dalle apparenze: le due scienze, diritto e matematica, apparentemente agli antipodi, hanno molteplici ragioni per essere valutate quali indissolubili alleate per la risoluzione di innumerevoli questioni in ambito forense. L'elenco dei terreni elettivi della "originale alleanza" è assai vasto, ma il terreno più fertile è certamente offerto dai numerosi spunti proposti dall'analisi dei contratti bancari e finanziari, dove quasi ogni clausola della relazione tra banca e/o intermediari e cliente, prevede una stretta correlazione tecnica tra il diritto e la matematica.

---

<sup>⊗</sup> Il presente contributo è stato prodotto nell'ambito dell'attività di ricerca del laboratorio scientifico-giuridico; **GIURIMATICA**. Corrispondente GIURIMATICA per il presente documento: [rundo@dm.unict.it](mailto:rundo@dm.unict.it) ; [distallo@distallo.it](mailto:distallo@distallo.it)

E' noto infatti che sia il T.U.B. (Testo Unico Bancario) che il T.U.F. (Testo Unico della Finanza) prevedono a tutela dei clienti, l'obbligo a carico di banche e intermediari finanziari di stipulare - a pena di nullità - contratti in forma scritta consegnandone un esemplare al cliente. Tuttavia, il contenuto di questi particolari contratti non vedrà mai la sola presenza di regole giuridiche, perché vi troveremo in simbiosi anche regole e formule proprie della matematica, come quelle relative al calcolo dei tassi di interesse, ai piani di ammortamento, al modello di calcolo del c.d. "Mark to Market", etc. Ecco dunque, che le regole della matematica vengono ad interagire con quelle del diritto, costituendo in molteplici ipotesi, unico parametro di riferimento, ad esempio, per valutare se un determinato contratto bancario o finanziario sia dotato di una causa e/o di un oggetto, degni di tutela da parte dell'ordinamento, ovvero, per decretare se quel contratto sia affetto da patologie tali da renderlo in tutto, o in parte, viziato.

D'altro canto, appare evidente come la modulistica standardizzata utilizzata da parte di banche e intermediari, sia il frutto di una strettissima collaborazione tra professionalità diverse: tra gli avvocati degli uffici legali e gli ingegneri e/o i matematici degli appositi dipartimenti, che insieme hanno il compito di elaborare le proposte contrattuali, che saranno utilizzate per regolamentare i rapporti con il cliente. Nei descritti ambiti accade che le regole della matematica finiscono per perdere i propri confini, "invadendo" le regole del diritto. Dunque, nelle materie di cui si discute, l'approccio scientifico dovrà necessariamente vedere a contatto "i gomiti" del matematico e quelli del giurista, volendo ipotizzare un laboratorio ideale, dove cercare risposte tecniche e soluzioni univoche che possano fornire risultati coerenti con le leggi fondamentali che governano entrambe le materie. **Sotto il profilo strettamente scientifico, dovrà poi teorizzarsi che la matematica, quando diventa regola tecnica, cui le parti decidono di affidare le sorti del contratto, dovrà a sua volta riflettere nelle sue formule le regole giuridiche a cui presta – temporaneamente – servizio.** In questa dinamica correlata, i contraenti non potranno allora, ad esempio, fare assurgere, a legittima regola di diritto, formule matematiche che diano luogo, in violazione dell'art. 1346 del Codice Civile, a un

oggetto del contratto impossibile, illecito, indeterminato o indeterminabile

2. Come anticipato nel paragrafo precedente, può certamente ipotizzarsi una correlazione virtuosa tra matematica e diritto, tra logica-matematica e strategia legale, tra teorie scientifiche e materie giuridiche, sicché appare a questo punto doveroso esplicitarne le possibili applicazioni pratiche.

Che esista una relazione intrinseca, ad oggi probabilmente solo parzialmente esplorata, tra matematica e diritto è poi – ci piace ipotizzare - indirettamente dimostrato dal fatto che alcuni dei grandi matematici vissuti nel passato furono anche famosi giuristi.

Sotto tale profilo, non può certo omettersi di ricordare l'illustre matematico *Pierre de Fermat* (1601 – 1665), brillantemente analitica del XVII secolo. Fermat fu un autentico cultore della scienza matematica: basti pensare, ad esempio, ad uno dei suoi ultimi contributi alla teoria dei numeri, meglio noto, non a caso, come “Ultimo Teorema di Fermat”. Una curiosità. Questo problema matematico, che “leggenda” vuole Fermat stesso abbia risolto in pochi passaggi annotati a margine di un suo documento (mai reperito), ha impegnato per circa 300 anni tutti i matematici del mondo - ivi compresi gli autori- essendosi giunti a una sua soluzione solo nel 1994, grazie ad un articolato e complesso lavoro (quindi molto più dei semplici passaggi marginali svolti da Fermat), compiuto dal matematico Andrew Wiles. **Ebbene, ritornando al tema principale di questo documento, occorre ricordare che Fermat, oltre ad essere un matematico, era un alto magistrato francese, che per anni aveva esercitato la pratica forense.** Ovviamente, oltre Fermat, e' certamente possibile menzionare altri giuristi-matematici che nel tempo hanno mostrato notevoli abilità in entrambi i settori, a riprova di quanto si intende teorizzare in questo documento: Matematica e Diritto hanno, in diversi ambiti, mutuamente bisogno l'uno dell'altra, se mai si voglia giungere ad ipotizzare soluzioni giudiziarie fondate su criteri oggettivi, in altri termini, fondate sulla oggettiva “certezza della matematica”.

Venendo alla rappresentazione dei teorizzati vantaggi della matematica applicata al diritto bancario, **la tesi proposta dagli autori si pone l'obiettivo di documentare, tramite il presente**

**lavoro, come una “visione basata sulle rigorose leggi della matematica”, sulle più rilevanti problematiche del contenzioso bancario, possa contribuire a risolvere molte - se non tutte - le questioni che per anni hanno infiammato il dibattito forense, alcune delle quali ancora attuali nel panorama giurisprudenziale.** A tal proposito, nei paragrafi che seguono, gli autori introdurranno, a titolo esemplificativo, alcune delle tematiche tecnico - giuridiche che maggiormente impegnano gli operatori del diritto che si occupano di contenziosi bancari, evidenziando come, ad avviso degli stessi, la maggior parte di queste, se non tutte, potrebbero essere agevolmente superate, mediante l’ausilio dell’applicazione pratica di modelli matematici e di approcci logico-matematici, opportunamente contestualizzati.

3. Il settore bancario italiano è regolamentato da una moltitudine di fonti: dalla Costituzione alle circolari di Banca d’Italia, passando per Decreti Ministeriali, delibere del C.I.C.R. (Comitato Interministeriale Credito e Risparmio), sino all’ampia regolamentazione ricavabile dal T.U.B. (Testo Unico Bancario), senza omettere ulteriori normative ricavabili da regolamenti e leggi di derivazione comunitaria oltre che dal Codice Civile. Non mancano poi regole ricavabili da leggi ordinarie, quali ad esempio, quelle dettate dalla Legge n. 108 del 1996 in tema di usura. Ai nostri fini, giova evidenziare che il quadro normativo e regolamentare che disciplina il settore bancario italiano è profondamente intriso di relazioni tra “formule matematiche” e “formule giuridiche”. Molti gli esempi, iniziando dall’ultima normativa citata, la c.d. Legge anti usura. Sul punto, la dottrina e la giurisprudenza, sia di legittimità che di merito, si sono trovate costrette ad affrontare questioni giuridiche non risolvibili senza avere prima affrontato le “forche caudine” della corretta formula matematica da adottare. **Il tema della “relazione” tra le due scienze si è posto , ad esempio, per l’adozione della formula matematica da utilizzarsi per la verifica del calcolo del superamento o meno dei c.d. “tassi soglia usura”.** E’ noto, infatti, che le aule dei tribunali italiani proiettano da anni in tema di usura uno scontro giudiziario, che ha quale protagonista la selezione giudiziaria delle c.d. “voci di costo” da utilizzarsi ai fini del calcolo del tasso di interesse, da confrontare poi con i c.d.

“tassi soglia usura”, per la verifica dell’eventuale superamento. Secondo l’art. 644, comma 4, del C.P. “per la determinazione del tasso di interesse usurario si tiene conto delle commissioni, remunerazioni a qualsiasi titolo e delle spese, escluse quelle per imposte e tasse, collegate all’erogazione del credito”. Il dibattito sul reato, ovvero in alternativa sulle conseguenze civilistiche dell’usura, ai sensi dell’art. 1815 del Codice Civile, si è statisticamente cristallizzato e forse opacizzato nella asfittica alternativa tra dovere includere o al contrario escludere alcune voci di costo, ai fini della determinazione del tasso di interesse praticato da parte della banca. La conseguenza di questa visione è che si è persa di vista la ratio della norma, finendosi per demandare al singolo tribunale, di decidere il caso concreto spesso sulla base della sola selezione di voci da includere o escludere ai fini del calcolo del tasso, con la nota aggravante che quasi mai i tribunali, a volte anche al loro interno, assumono sul punto decisioni uniformi. **L’usura è dunque diventato “reato opinabile”, perdendo la norma nella sua applicazione giudiziaria concreta ogni percepibile oggettività.**

Il quadro complessivo, che sembra emergere dall’attuale contenzioso italiano tra banche e clienti, risulta essere poco confortante, facendo pienamente emergere tutte le criticità insite nelle modalità con le quali si è inteso approcciare al tema dell’usura. Volere affidare a giuristi, magistrati o avvocati che siano, la soluzione di controversie – in buona sostanza - fondate quasi esclusivamente sulla risoluzione di questioni tecniche matematiche, ha certamente contribuito ad alimentare l’attuale caos giudiziario, con conseguenze spesso destabilizzanti per i fruitori, prima ancora che per gli operatori del diritto. *Incerta pro nullis habentur.*

Del resto, se la soglia dell’incertezza sugli esiti del contenzioso si eleva in modo esponenziale e diviene insopportabile, non è difficile mettere in discussione in radice il concetto, già autonomamente labile, di “Giustizia”. **Da qui, la proposta degli autori di rimettere le regole e le formule oggettive della matematica, al centro della soluzione dei casi giudiziari relativi al contenzioso bancario al vaglio della magistratura, sull’assunto che la proposta centralità della regola matematica possa offrire soluzioni dotate di maggiore oggettività, in tesi,**

**ben più solide e uniformi di quelle attualmente ricavabili dalla lettura delle sentenze di merito e di legittimità, a beneficio di tutti gli utenti della Giustizia.**

4. Qual e' allora il ruolo della matematica nel contenzioso bancario? Come detto, la maggior parte delle liti in ambito bancario – a parere degli autori - non potrà trovare una soluzione oggettiva solo applicando le regole del diritto, atteso che la quantificazione numerica dei parametri aventi riflessi economici inseriti nei contratti bancari (tassi, commissioni, algoritmi di strutturazione del rimborso del credito, etc...), deve essere conforme ai criteri scientifici di matematica finanziaria; inoltre, ove richiesto dalla normativa vigente, la stessa dovrà essere conforme alle direttive tecniche redatte dagli appositi organi di vigilanza - in primo luogo Banca d'Italia -; infine, dovrà essere coerente con i modelli matematici comunicati al cliente e formalmente adottati dallo stesso intermediario, allo scopo di strutturare quel determinato rapporto bancario.

In questo coacervo tecnico di “vincoli analitici”, il ruolo del matematico dovrà essere quello di trovare una soluzione oggettiva e scientificamente inoppugnabile, rendendo a quel punto – si auspica - facile il compito del giudice, il quale, una volta appurata l'oggettività e la corretta rispondenza tra pattuizioni contrattuali, normativa di settore e verifica matematica applicata al rapporto esaminato, potrà assumere soluzioni giuridiche, auspicabilmente caratterizzate da criteri altrettanto univoci e oggettivi.

Di seguito alcuni esempi pratici correlati ai temi menzionati al paragrafo precedente:

- **Algoritmo di ammortamento progressivo c.d. *alla francese* ed aperture di credito regolate in conto corrente.**

Nel panorama giurisprudenziale italiano, con alcune eccezioni, le decisioni di merito tendono ad escludere che nell'algoritmo di ammortamento progressivo c.d. *alla francese*, sia insito un fenomeno di illecita capitalizzazione dell'interesse corrispettivo che, ove riconosciuto, sancirebbe una violazione del disposto di cui all'art. 1283 del Codice Civile. Ebbene, il presente

contributo non è certamente il luogo adatto per una puntuale analisi matematica dell'algoritmo di rimborso progressivo alla francese. Tuttavia, per quel che qui rileva, a parere degli autori, le decisioni di rigetto sul punto assunte dai tribunali italiani potrebbero essere originate da una non corretta rappresentazione analitica del problema.

Infatti, a sommosso avviso di chi scrive, gli interessati che intendono muovere contestazioni giudiziarie ad un piano di ammortamento c.d. *alla francese* dovrebbero, **in via principale, tentare di affrontare la questione della determinatezza e determinabilità del piano di rimborso, ai sensi dell'art. 1284 del Codice Civile, piuttosto che focalizzare la contestazione sul tema della indebita amplificazione dell'interesse corrispettivo per effetto di un implicito meccanismo anatocistico, per inciso comunque matematicamente dimostato dagli autori in alcuni saggi referenziati in bibliografia.** Invero, si analizzi di seguito, il modello matematico dell'algoritmo di ammortamento a rate posticipate c.d. alla francese:

$$C = \sum_{k=1}^{mn} R_m (1 + i_{1/m}(t_k))^{-k} = \sum_{k=1}^{mn} R_m (1 + i(t_k))^{-k/m}$$

dove si è indicato con “C” il capitale prestato da rimborsare, con “R<sub>m</sub>” la rata a periodicità “m” infra-annuale, con “m” la periodicità adottata (mensile, trimestrale, semestrale), “n” il numero di anni di ammortamento, “i<sub>1/m</sub>” il tasso di interesse m-periodale, “i” il tasso di interesse nominale annuo, “t<sub>k</sub>” l'istante temporale a cui riferire il tasso di interesse (nel caso generico di tasso di interesse variabile). Ebbene, una attenta ed approfondita analisi matematica del suddetto modello, applicato dagli intermediari per strutturare il piano di rimborso, permette molto spesso di evidenziare molteplici elementi di non univoca caratterizzazione del piano di rimborso, atteso che, dalle stesse clausole contrattuali, assimilabili a dei veri e propri predicati logico-matematici, risulterà - in molti casi oggetto di analisi - possibile ricostruire più piani di ammortamento, tutti compatibili con le clausole pattuite, ma ciascuno avente un distinto ammontare di interessi corrispettivi e conseguentemente un distinto tasso di interesse effettivo. Sotto il profilo matematico, la valutazione del

modello algoritmico dell'ammortamento c.d. *alla francese* diventerà ancora più complessa, se nel contratto il tasso corrispettivo risulta indicizzato ad un parametro da individuarsi per *relationem* - di solito l'EURIBOR -, atteso che non sempre l'intermediario specifica in maniera chiara, puntuale e univoca, come procedere alla strutturazione dell'algoritmo di ammortamento a compensazione dello *ius variandi* previsto in contratto. E ancora. Di solito, nei contratti di finanziamento non sempre si rinviene una chiara, puntuale ed univoca determinazione del *tenor*, del *fixing* e della *base giornaliera* del parametro di indicizzazione, del regime finanziario adottato in riferimento al calcolo del tasso di interesse (corrispettivo e/o di mora) e delle rate del piano di rimborso, del *day-count convention*, del procedimento di determinazione del numero residuo di rate correlato alla c.d. condizione di chiusura dell'algoritmo di ammortamento, etc.

**La mancata puntuale indicazione nel contratto dei suddetti parametri/elementi, determina l'impossibilità di stabilire, con giuridica certezza, quale sia il piano di rimborso pattuito, non essendo stato stabilito per iscritto in modo matematicamente univoco, quale tra i possibili piani di ammortamento, tutti compatibili con i predicati logico-matematici delle clausole contrattuali, le parti abbiano inteso adottare in sede di stipula contrattuale.**

In tali casi, a parere degli autori, alla rilevata indeterminazione, dovrebbero farsi conseguire le sanzioni previste dall'art. 1284 del Codice Civile e/o dell'art. 117, commi 4-7, del T.U.B. Dunque, operando un'analisi del rapporto bancario secondo le rigorose leggi della matematica, si possono tentare di ottenere con maggiore facilità risultati analoghi, riclassificazione al tasso legale, ovvero ai tassi minimi BOT t.p.t. vigenti, di quelli oggi spesso invano rincorsi, tentando di dimostrare l'implicito anatocismo presente nell'algoritmo di ammortamento alla francese: tesi quest'ultima certamente perseguibile sotto il profilo matematico ma – si è visto nella pratica - di difficile trasposizione giudiziaria.

Allo stesso modo, potrà dirsi per quanto concerne l'analisi matematica relativa ai rapporti di credito regolati in conto corrente, quali le aperture di credito, i conti anticipi, etc... In tali contratti, per verificare se l'intermediario è legittimato, ai sensi

della delibera CICR del 09.02.2000, a capitalizzare gli interessi debitori, ovvero per altro verso se applica in concreto i tassi pattuiti, occorre, a parere di chi scrive, sottoporre il contratto ad accurata analisi matematica, verificando, ad esempio, se il day-count convention corrisponde alla capitalizzazione adottata, in quanto una errata o difforme indicazione dello stesso, genera un periodo di capitalizzazione effettivo distinto. Stesse analisi andranno poi effettuate per le clausole che descrivono il modello di calcolo degli interessi, delle commissioni, etc..

Anche in questi casi, una non determinata o univoca pattuizione degli elementi atti a calcolare il costo del contratto si tradurrebbe, a parere degli autori, in altrettanti profili di illegittimità, censurabili ai sensi dell'art. 1284 del Codice Civile e/o ex art. 117, commi 4-7 T.U.B., determinando le medesime conseguenze sopra richiamate.

• **Calcolo del TAEG/ISC ovvero del TAEG/TEG nei rapporti di finanziamento, di leasing e di apertura di credito regolata in conto corrente**

Venendo all'analisi dei riferiti indicatori, sul punto sembra esistere una "notevole oscillazione valutativa" presso le aule giudiziarie, riscontrandosi spesso contrapposte tesi in pacifica antitesi tra loro: Usare o meno il modello della Banca d'Italia? Includere o meno le commissioni o spese meramente eventuali? Calcolare il TAEG/ISC effettivo secondo la fisiologica evoluzione del piano di ammortamento, ovvero calcolarlo in tutti i possibili scenari e valutando il c.d. worst-case? Calcolare il TAEG o il TEG ? Includere o meno le commissioni di massimo scoperto o costi simili? etc... Ebbene, anche in questi casi l'approccio matematico può costituire valido, se non insostituibile, elemento di aiuto. A tal proposito, si rimanda il lettore ad una più approfondita disamina delle suddette problematiche, trattate dagli autori in un precedente contributo pubblicato su questa rivista, dal titolo "*Matematica Applicata al Contenzioso Bancario: L'Usura contrattuale. Teoria dei Giochi e Matematica Finanziaria per definire una strategia legale efficiente ed una valutazione scientificamente accurata dell'usura nei contratti bancari*".

In questa sede, preme ribadire un concetto ivi espresso e cioè che a parere degli autori, al fine di tentare di indirizzare in modo più proficuo le strategie processuali da adottare nelle controversie in materia bancaria, occorre in primo luogo comprendere quali modelli matematici applicare, dunque, attraverso la Teoria dei Giochi (ulteriore branca scientifica della matematica applicata) definire una strategia legale c.d. dominante, ossia porre la controparte nell'ambito del giudizio, in una posizione tale, da dover necessariamente condividere l'approccio proposto, poiché altrimenti quest'ultima si troverebbe a dover subire le eventuali conseguenze giudiziarie negative di una mancata adesione alla soluzione prospettata. Sebbene intuitivamente di facile comprensione, nella sua attuazione pratica, la ricerca della strategia tecnico-legale dominante mediante la Teoria dei Giochi, risulta particolarmente complessa, poiché il più delle volte richiede conoscenze non solo di matematica ma anche di economia ed, in alcuni casi, di statistica. In coerenza dunque alla descritta logica/finalità, gli autori propongono l'adozione dei seguenti modelli matematici per il calcolo del TAEG/ISC, ovvero del TAEG/TEG nell'ipotesi di aperture di credito o similari:

- **Finanziamento a rimborso rateale:**

$$\begin{aligned}
 C_0 + \sum_{s=1}^l C_s (1 + TAEG)^{t_0 - t_s} + \\
 - \sum_{j=1}^m S_{ut}^j (1 + TAEG)^{t_0 - t_j} = \\
 = \sum_{k=1}^n \left( \left( R_k + \sum_{i=1}^{l_k} s_k^i \right) (1 + TAEG)^{t_0 - t_k} \right)
 \end{aligned}$$

$C_0$ =capitale erogato alla stipula;  $C_s$ =erogazioni di capitale successivo in  $l$  stati di avanzamento;  $S_{ut}^j$ =spesa  $j$ -esima una-tantum;  $R_k$ =rata  $k$ -esima;  $s_k^i$ =spesa ricorrente  $i$ -esima per la rata  $k$ -esima;  $t_0$ =istante temporale iniziale coincidente con la data di stipula;  $t_k/t_j/t_s$ =istanti temporali successivi;  $n$ =numero di rate;  $m$ =numero di costi/spese una-tantum;  $l_k$ =numero di spese ricorrenti per la rata  $k$ -esima;

- **Leasing finanziario:**

$$\begin{aligned}
 V_0 - B(1 + TAEG)^{t_0 - t_B} - \sum_{j=1}^m S_{ut}^j (1 + TAEG)^{t_0 - t_j} = \\
 = \sum_{k=1}^n \left( \left( R_k + \sum_{i=1}^{l_k} s_k^i \right) (1 + TAEG)^{t_0 - t_k} \right) + \\
 + E_n (1 + TAEG)^{t_0 - t_n}
 \end{aligned}$$

Dove si è indicato:  $V_0$ =prezzo di acquisto del bene(istante iniziale supposto coincidente con la stipula);  $B$ =anticipo sull'importo di acquisto;  $S_{ut}^j$ =spesa j-esima una-tantum;  $R_k$ =canone k-esimo;  $s_k^i$ =spesa ricorrente i-esima per il canone k-esimo;  $E_n$ =quota opzione di riscatto;  $t_0$ =data di stipula;  $t_k/t_j/t_B$ = istanti temporali successivi;  $t_n$ =istante coincidente con la conclusione del piano finanziario;  $n$ =numero di canoni;  $m$ =numero di costi/spese una-tantum;  $l_k$ =numero di spese ricorrenti per il canone k-esimo;

- **Apertura di Credito regolata in c/c:**

$$\begin{aligned}
 C - \sum_{i=1}^n S_i^{Acc} \\
 = \sum_{j=1}^{N_{tr}} \left[ S_j (1 + TEG)^{t_0 - t_j} + \right. \\
 + \sum_{m=1}^{n_a^j} M_{avere}^m (1 + TEG)^{t_0 - t_m^j} \\
 \left. - \sum_{k=1}^{n_d^j} M_{dare}^k (1 + TEG)^{t_0 - t_k^j} \right] + \\
 + S_f (1 + TEG)^{t_0 - t_f}
 \end{aligned}$$

$C$ =accordato (può riferirsi anche al capitale max utilizzato, con le dovute modifiche analitiche);  $TEG$ =incognita da calcolare con metodo iterativo;  $S_j$ =saldo iniziale del trimestre  $j$ -esimo;  $N_{tr}$ =numeri trimestri;  $M^m_{avere}$ =movimenti avere nel trimestre  $j$ -esimo;  $M^k_{dare}$ =movimenti dare nel trimestre  $j$ -esimo;  $S_f$ =saldo finale del rapporto di credito;  $t_j/t_m/t_k$ =istanti temporali di attualizzazione delle singole voci;  $t_0$ =istante iniziale coincidente con la stipula contrattuale;  $S_i^{ACC}$ =Spese  $i$ -esima una-tantum sostenuta per l'accensione del rapporto di credito;  $n$ =numero di spese una-tantum per accensione del rapporto;  $n^j_a$ =numero movimenti ad avere per ciascun trimestre  $j$ -esimo;  $n^j_d$ =numero movimenti a dare per ciascun trimestre  $j$ -esimo;

**Ebbene, è possibile dimostrare, sotto il profilo matematico, che i modelli sopra riportati sono perfettamente compatibili con le indicazioni fornite da parte della Banca d'Italia, *ratione temporis* applicabili, nonché con i modelli matematici adottati dagli intermediari per strutturare i rapporti bancari di cui si discute.** Dunque, sotto tale profilo, in tesi, le parti contendenti non potranno avere alcun contrasto nell'adottare congiuntamente le formule sopra proposte per la soluzione di questioni giudiziarie. A questo punto, un'analisi robusta della dinamica temporale attualizzata alla stipula contrattuale, dell'indicatore TAEG/ISC, nel modello per i finanziamenti e/o leasing, ovvero del TAEG/TEG, nel modello per le aperture di credito in conto corrente (o rapporti similari), permetterà senz'altro di chiarire, con valutazione matematica oggettiva, se il rapporto esaminato si trova o meno in usura pattizia, ovvero se l'indicatore sintetico di costo riportato in contratto è corretto o meno. Quanto detto, può certamente estendersi alle valutazioni finanziarie dei rapporti di apertura di credito regolate in conto corrente (e similari), la cui analisi potrà essere effettuata, considerando, ovvero non considerando, l'apporto delle commissioni mere o eventuali, ovvero della CMS o simili. Operando in tal modo, non potrà verosimilmente darsi luogo a nessuna problematica di worst-case, trimestre di calcolo, oneri eventuali, interessi di mora e analoghe "diatribe", nella ricostruzione matematica dei rapporti contrattuali analizzati, atteso che i calcoli saranno eseguiti, sia in presenza di questi oneri che in assenza,

rendendo pertanto completa la disamina matematica del rapporto e rendendo analiticamente evidente il rendimento del contratto/prodotto esaminato, in coerenza matematica con le formule proposte dall'organo di vigilanza.

In conclusione, di questa breve disamina, preme evidenziare che da un'analisi di innumerevoli casi concreti di contenzioso bancario, sembra rilevarsi l'assenza, anche in sede di Consulenza Tecnica di Ufficio (CTU), della fondamentale e propedeutica **analisi matematica dei modelli adottati per i rapporti oggetto di esame. Gli autori intendono riferirsi, ad esempio, alla rilevata ricorrente assenza di valutazioni in sede peritale, dell'insieme di esistenza delle funzioni associate ai modelli adottati, della dimostrazione di esistenza ed unicità della soluzione di questi modelli, dell'esistenza ed univocità di una soluzione economicamente significativa, dello studio della derivata prima e seconda delle funzioni associate ai modelli adottati, dell'indicazione dei parametri e dell'algoritmo adottato come metodo risolutivo (passo di integrazione, cifre di approssimazioni, etc..) e così via.**

Inoltre, va segnalato come anche in presenza di rapporti unici nel loro genere e non ricompresi dagli schemi sopra appena elencati, il matematico sarà – o almeno dovrebbe essere - in grado di costruire il modello che descrive la pattuizione economica oggetto del contratto, permettendo così al giudice di meglio comprenderne le dinamiche ed i reali costi, a beneficio delle parti in causa e dunque degli esiti del contenzioso, che verteranno verosimilmente su criteri oggettivi basati su inoppugnabili regole matematiche.

Ecco che, a parere degli autori, nel contenzioso bancario le scienze matematiche possono assumere un ruolo decisivo per la ricerca di soluzioni oggettive da offrire al giudice ed in definitiva tramite esso alle parti contendenti, sotto forma di sentenza fondata su leggi scientifiche univoche.

5. La complessità del sistema finanziario odierno, considerato peraltro quanto avvenuto negli ultimi anni negli USA per via della deregolamentazione dei prodotti finanziari derivati strutturati come i CDO (*Collateralized Debt Obligation*) o gli ABS (*Asset Backed Security*) per citarne alcuni, rende anche in questo

settore più che mai indispensabile il ruolo della matematica finanziaria avanzata - altrimenti nota come finanza quantitativa o ingegneria matematico-finanziaria - per la caratterizzazione, anche a fini giudiziari, degli strumenti finanziari proposti dagli intermediari alla clientela, sia o meno da considerarsi retail.

6. L'attuale quadro normativo volto a regolamentare il settore finanziario italiano, è notoriamente composto nei suoi assetti fondamentali dal T.U.F. (Testo Unico delle disposizioni in materia di intermediazione finanziaria), testo questo poi corroborato da varie delibere recanti norme di attuazione emanate da parte della CONSOB (Commissione Nazionale per le Società e la Borsa). Negli anni più recenti, il contesto di riferimento normativo e regolamentare è stato poi via via ampliato e modificato da specifici interventi di derivazione comunitaria, volti a tentare di fornire una maggiore tutela agli investitori, tra i quali da ultimo si ricorda la c.d. direttiva "MiFID II". Nel settore finanziario, il contenzioso ha visto spesso protagonisti in negativo, prodotti finanziari venduti dalle - ovvero mediante le - banche, a soggetti - imprese e/o privati -, con i quali la banca già intratteneva ordinari rapporti bancari. L'asimmetria informativa di partenza - la banca conosce, o almeno dovrebbe, tutte le informazioni relative alla situazione finanziaria del suo cliente -, si è spesso sommata ad una ulteriore asimmetria informativa: la banca conosce, o almeno dovrebbe, i contenuti tecnici dei prodotti finanziari proposti al suo cliente. Non solo. La banca conosce, o almeno dovrebbe, anche i c.d. scenari probabilistici, relativi alla probabile evoluzione del futuro rendimento dei prodotti proposti al suo cliente.

L'effetto leva, definito dalle molteplici asimmetrie informative appena descritte, - ancora più marcato quando è la stessa banca a strutturare tramite i propri "esperti" i prodotti proposti al cliente -, ha reso fertile il terreno sul quale è sorto e si è alimentato il contenzioso in materia finanziaria, che oggi vede una ridotta presenza presso i tribunali italiani, rispetto al contenzioso bancario, solo per via della minore platea di soggetti coinvolti.

**Anche su questo ulteriore palco giudiziario, il minimo comune denominatore sembra essere quello dell'incertezza.** L'esito dei contenziosi in materia finanziaria, quando non è legato a profili di carattere formale quali, ad esempio, la presenza

o meno della sottoscrizione del c.d. “contratto quadro”, ma viene piuttosto focalizzato su aspetti tecnici, volti a comprendere il concreto funzionamento dei prodotti finanziari ceduti al cliente investitore, diviene spesso di difficile previsione. Ad avviso degli autori, per la risoluzione di questi particolari contenziosi, la relazione tra matematica e diritto diventa davvero ineludibile. Solo per citare alcuni esempi, si ricordano le varie pronunce dichiarative della nullità di contratti derivati, emesse dai due tribunali italiani maggiormente investiti da tali questioni: i tribunali di Milano e di Torino.

Gli operatori del diritto che a vario titolo hanno avuto modo di analizzare contratti derivati, si sono spesso misurati sugli effetti della mancata indicazione nel contratto, di precise e univoche formule matematiche da utilizzarsi – ad esempio -, per il calcolo del “Mark to Market”, oppure dell’”up-front” da riconoscere al cliente. Gli algoritmi utilizzati per regolare i contratti derivati, sono stati spesso demandati a un “agent calculator” esterno, senza che nel contratto siano stati indicati i modelli matematici da utilizzare per la sua regolazione. Sono note le oscillazioni che hanno caratterizzato le varie decisioni dei due fori giudiziari citati: talune sentenze hanno posto l’accento su profili inerenti vizi incidenti sulla causa del contratto – teorizzando un vulnus riconducibile al concetto di alea irrazionale -, mentre altre si sono focalizzate su vizi incidenti sull’oggetto nel contratto; altre pronunce invece non hanno accolto i rilievi degli attori, pur in presenza delle medesime condizioni di partenza. Tuttavia, alla ricerca ancora una volta di criteri di auspicabile valutazione oggettiva delle questioni poste al vaglio dei diversi tribunali, occorre – ad avviso degli autori - domandarsi, *quid iuris*, come procedere nell’ipotesi di mancata presenza nel contratto di formule o modelli matematici atti a regolare il rapporto ovvero nell’ipotesi di presenza di formule matematiche prive di tutti i necessari elementi idonei a fare ottenere alle parti in corso di esecuzione del contratto, risultati certamente univoci rispetto alle condizioni date. E ancora, quale relazione sussiste tra formule matematiche non univoche e vizi del contratto? Da ultimo, ponendosi dal punto di vista dell’intermediario che intenda operare correttamente: esistono e quali sono, le condizioni/formule matematiche oggettive, rispettate le quali l’intermediario stesso

potrà ritenere con ragionevole certezza, che il cliente investitore non abbia validi elementi per lamentare, successivamente, l'arbitrarietà della relazione economica e contrattuale? A parere degli autori, le risposte ai quesiti appena formulati andranno ancora ricercate tra le regole della matematica, prima che tra quelle giuridiche.

Del resto, *mutatis mutandis*, se per la giurisprudenza di merito e di legittimità è certamente censurabile, con la sanzione della nullità, la promessa di vendita di un costruendo immobile, priva di tutti gli elementi idonei ad individuare con certezza le caratteristiche dell'immobile da realizzare, non si vede perché ad analoga considerazione non debba pervenirsi, tutte le volte in cui il contratto finanziario non contiene tutti gli elementi idonei a rendere univocamente identificabile – senza alcun margine di discrezionalità – l'algoritmo finanziario pattuito e dunque in ultima analisi il risultato economico che le parti possono/devono attendersi. **Anche nei contratti finanziari, l'alea - salvo smentite -, dovrà sempre riguardare esclusivamente le oscillazioni del mercato o degli indici cui afferisce il prodotto oggetto del contratto finanziario, ma non potrà certamente riguardare i modelli matematici e statistici usati per la strutturazione del titolo finanziario ovvero per le valutazioni dei benchmarks di riferimento, che dovranno rendere sempre misurabili (o stimabili), con certezza per le parti, gli effetti prodotti dagli eventi futuri sullo strumento finanziario sottoscritto.**

7. In ambito finanziario, sebbene con un livello di complessità certamente superiore a quello bancario, il ruolo della matematica avanzata risulta, a parere degli autori, ancora una volta decisivo nel tentare di dirimere le questioni sottese al nutrito contenzioso presente presso i tribunali, che altrimenti rimarrebbero prive di soluzioni oggettive e affidate a mutevoli opinioni giudiziarie, vieppiù impennate esclusivamente su aspetti formali, come del resto di recente accaduto per la nota querelle relativa ai c.d. "contratti monofirma", che ha infiammato il dibattito giudiziario, sino a "scomodare" l'attenzione delle Sezioni Unite della Corte di Cassazione.

Ciò premesso, sempre nell'intento di fornire mediante il presente contributo una overview di come la matematica possa contribuire a dirimere vicende di natura squisitamente tecnica in

sede giudiziaria, si procederà di seguito ad illustrare un esempio applicativo.

- **Analisi matematica degli strumenti derivati a struttura classica: IRS**

Nel caso che qui si analizza ossia il contratto derivato classico, tipicamente un *Interest Rate Swaps* (IRS) su tassi (sebbene analoghi discorsi, con le dovute ed opportune contestualizzazioni analitiche, possono essere facilmente estesi all'intera platea degli strumenti finanziari a radice derivativa), occorre preliminarmente descrivere gli elementi che contraddistinguono questo strumento finanziario, in relazione principalmente alle finalità per cui risulta essere stato emesso in quanto questo permetterà, tra l'altro, di stabilire quale fosse la volontà delle parti all'atto della stipula del contratto. A tal fine, pertanto, occorrerà rilevare i dati ricavabili dagli indicatori più o meno complessi, che qualificano finanziariamente questo strumento; per citarne alcuni: il MtM (Mark to Market), le valutazioni dei differenziali in alcuni scenari probabilistici, la quantificazione di un eventuale up-front, l'analisi prospettica dei tassi forward indicizzati nel derivato, etc.

Chiariti i superiori elementi, occorrerà ai nostri fini adottare un procedimento univoco di valutazione dello strumento derivato. **Si analizzerà a titolo di esempio uno strumento IRS su tassi (ne esistono anche su *valute* o su *equity*) con la precisazione che, come si è anticipato, analoghi ragionamenti potranno comunque agevolmente essere estesi alle altre tipologie di contratti finanziari derivati.**

L'IRS su tassi, più semplicemente "swap" è un contratto mediante il quale le parti si scambiano, in date prestabilite e per una durata prefissata, dei flussi finanziari a tassi di interesse differenti, calcolati su uno specifico capitale detto *nozionale*, ad esempio, un mutuo contratto o un titolo emesso. In genere gli swaps sono strutturati in modo che una delle due parti, paghi all'altra la differenza rilevata tra i due flussi, appunto denominata "differenziale". Il capitale di riferimento - nozionale - non è oggetto di scambio tra le parti ma più semplicemente costituisce il parametro su cui sono determinati e calcolati i flussi finanziari. La prassi finanziaria evidenzia varie tipologie di "swap":

*plain vanilla, basis, amortizing, con opzioni cap/floor/collar, etc.* Di solito, le banche stipulano, con società o clienti retail, contratti IRS su tassi di interesse i cui flussi finanziari sono indicizzati ad un tasso fisso e costante (spesso riferito all'EURIRS) e ad uno variabile (di solito ancorato all'andamento dell'EURIBOR).

Ad esempio, chi sottoscrive un contratto swap su tassi d'interesse impegnandosi a pagare – sullo stesso nozionale - un tasso d'interesse fisso predeterminato e a ricevere un tasso d'interesse variabile è come se acquistasse un titolo a tasso variabile e vendesse un titolo a tasso fisso. Pertanto, detto contraente incasserà un differenziale positivo quando il tasso variabile sale oltre il tasso fisso, ovvero avrà un differenziale negativo quando il tasso variabile si mantiene sotto tale soglia. Appare ovvia la possibile finalità di “copertura” sottesa da questi contratti. Di contro, nelle ipotesi di sottoscrizione di derivati per finalità speculative, le valutazioni delle probabilità dell'andamento dei tassi variabili, da parte dei due contraenti, saranno necessariamente diverse, per via della competizione tra le parti che vorranno, entrambe, tentare di massimizzare i differenziali a proprio favore. **Questa competizione, secondo i modelli classici di Teoria dei Giochi, porterà a delle condizioni di non equilibrio, atteso che una delle parti massimizzerà il proprio pay-off (differenziali) a discapito dell'altra e, pertanto, la probabilità che ciò accada, per ciascuno dei contraenti, andrà attentamente stimata all'atto della stipula**, esaminando la struttura dell'IRS e le curve dei tassi forward di indicizzazione dei flussi finanziari. Ai nostri fini, sarà ancora utile valutare la questione della corresponsione dei c.d. up-front, ossia delle commissioni che vengono – o almeno dovrebbero essere - riconosciute a una delle parti che sottoscrive un contratto di interest rate swap, nell'ipotesi di squilibrio del valore alla stipula dell'IRS.

In tutte le descritte ipotesi, è necessario adottare un modello matematico corretto per il calcolo dei tassi forward, del MtM, dell'eventuale up-front, e così via. Quale modello adottare? Ebbene, lo schema di calcolo del valore di un IRS di tipo amortizing index linked (fixed leg / floating leg), può essere così “modellizzato”:

$$V_{IRS}(t_k) = \sum_k D_k [(i(t_k) \cdot D_{cc}) - (i'(t_k) \cdot D'_{cc})] \cdot \omega(t_\delta, t_k)$$

Dove con “ $\omega(t_\delta, t_k)$ ” si è indicato il fattore di attualizzazione dei flussi, mentre con “ $D_k$ ” si è indicato il nozionale all’istante prefissato  $t_k$ , con “ $i(t_k)$  e  $i'(t_k)$ ” i relativi tassi dello swap, mentre con “ $D_{cc}$ ,  $D'_{cc}$ ” indichiamo i relativi *day count convention*. Dunque, andrà definito esattamente il *day count convention* per i flussi finanziari odierni ed attesi. Ma non basta. E’ necessario, altresì, calcolare correttamente i tassi forward impliciti alle date di fixing dello strumento per le stime prospettiche del derivato e per farlo, spesso, e’ richiesta l’adozione di procedimenti di interpolazione dei tassi spot(zero-coupon) a disposizione. Che metodo usare? Interpolazione lineare? Interpolazione polinomiale? Di che ordine? Gli autori suggeriscono una interpolazione a mezzo *Spline cubica* che permette di ottenere una maggiore precisione, dunque, sarà più preciso il calcolo del MtM e lo sarà la valutazione del valore reale del derivato all’atto della stipula.

Inoltre, talvolta, nei contratti derivati e/o finanziari, sono incluse delle opzioni (cap, floor, collar, etc..) che andranno ovviamente analizzate in termini di volatilità. A tal fine, copiosa letteratura scientifica fa riferimento a modelli di volatilità che ipotizzano una dinamica “*geometrica Browniana*”, sebbene l’evidenza reale, non sempre supporti detta ipotesi. L’analisi tecnica potrebbe ulteriormente proseguire, ma – ad avviso di chi scrive – gli esempi sopra illustrati appaiono sufficienti a corroborare la tesi che si intende sostenere con il presente contributo.

Dunque, ancora una volta, l’approccio matematico sembra rivelarsi di fondamentale ausilio nell’analisi dello strumento finanziario, in quanto consentirà non solo di indicare l’esatto valore attuale del derivato e stimarne quello futuro, ma altresì consentirà, mediante accurata disamina analitica, di rendere palese la reale finalità dello strumento finanziario oggetto di analisi (ad esempio dallo studio della dinamica dei tassi forward impliciti sarà possibile determinare, con buona approssimazione, se trattasi di derivato di copertura o di speculazione, etc.).

Simili considerazioni, sebbene con modelli differenti e finalità distinte, possono poi essere estese ad ogni tipologia di strumento finanziario e dunque sarà compito del perito-matematico evidenziarne la struttura analitica (contiene strutture derivative?; è agganciato ad un indice di riferimento?; e' uno titolo strutturato? Qual e' il reale sottostante? etc.), nonché formulare una ipotesi di analisi tecnica del sottostante (andamento del titolo, drawdown atteso, valore dei maggiori indicatori di analisi tecnica: RSI, Stocastico, ATM, Volume Indicator, etc.) , dei metodi di *pricing*, dello studio della *timeserie* del titolo, e così via.

**A partire da queste complesse analisi, che spesso richiedono conoscenze di matematica finanziaria avanzata, di finanza quantitativa e di statistica finanziaria, l'avvocato potrà poi conseguentemente farne derivare le proprie valutazioni/considerazioni giuridiche, che dovrebbero avere – questo almeno l'auspicio - un diverso peso in sede di contenzioso, atteso che l'adito giurista potrà far leva sui rilievi matematici basati su leggi oggettive a sostegno dei profili di illegittimità che egli intende far valere, ovvero a difesa dei profili che sono oggetto di contestazione.** A tal proposito, si ricordano le più comuni tematiche riconducibili alla mancanza di adeguatezza/appropriatezza delle operazioni finanziarie, l'eventuale incongruenza tra profilo MiFID *ratione temporis* applicabile e tipologia di strumento o operazione eseguita, l'insufficiente informazione e trasparenza adottata da parte dell'intermediario, la non corrispondenza tra le condizioni del prospetto informativo e la reale struttura del prodotto finanziario analizzato, la mancata analisi/indicazione dei parametri chiave dell'investimento, quali il drawdown atteso, il benchmark rispetto all'indice di riferimento, etc..

8. Con un deciso cambio di scenario, gli autori propongono di seguito ulteriori terreni elettivi, sui quali la coesistenza tra diritto e matematica può fornire vantaggi apprezzabili.

A tal proposito, viene in rilievo la nota tematica dei crediti bancari in sofferenza, cioè dei c.d. **Non Performing Loans (NPLs)**, esplosa negli ultimi anni con profili di ampio rilievo sociale, prima ancora che economico, a causa, o meglio anche a causa, della crisi economica che ha investito i paesi in area euro.

Sul punto, gli autori propongono una breve analisi della questione, in ottica squisitamente giurimetrica, rappresentando alcune soluzioni ritenute innovative, che mediante opportuni adattamenti, potrebbero essere da parte degli intermediari, utilizzate sia in fase preventiva, per la valutazione del c.d. **Credit Risk**, sia in una fase successiva, per meglio gestire il rischio derivante dai crediti deteriorati, una volta resosi manifesto (**Credit Management**).

Del resto, sono note le criticità sistemiche connesse all'elevata presenza di siffatti crediti presso numerose banche di paesi membri dell'area euro. Non a caso, infatti, di recente la BCE (Banca Centrale Europea), ha a tal proposito emanato un documento denominato "Linee guida per le banche sui crediti deteriorati (NPL)", consultabile su [www.bankingsupervision.europa.eu](http://www.bankingsupervision.europa.eu). L'intervento della BCE, tra l'altro, tende a responsabilizzare la governance bancaria, con l'attivazione di una serie articolata di sistemi di controllo e monitoraggio, in ordine ai quali, la tecnica infra proposta da parte degli scriventi potrebbe risultare di particolare efficacia. Invero, ancora una volta - anche nello specifico contesto disegnato da parte della BCE -, la collaborazione tra scienze giuridiche e scienze matematiche diventa, a parere degli autori, un valore aggiunto facilmente apprezzabile.

Infatti, com'è noto, l'attuazione delle linee guida indicate dalla BCE prevede l'intervento di competenze proprie sia di giuristi, che di matematici, ai fini della compiuta ed efficace realizzazione degli interventi di gestione e monitoraggio indicati.

9. L'analisi matematica dei modelli di base di gestione/valutazione degli NPLs, viene oggi effettuata mediante l'ausilio di modelli analitici di Credit Scoring, abbinati a modelli di Credit Management e Credit Risk Management. I modelli attualmente utilizzati dagli intermediari finanziari, ampiamente referenziati in letteratura scientifica, seppur molto efficienti e continuamente migliorati, presentano dei limiti intrinseci, tipici dei modelli matematici/statistici in forma chiusa: non possono stimare le dinamiche di rischio che non sono incluse nelle variabili del modello matematico (problemi di Optimal fitting del modello).

A tal proposito si richiamano i report periodici prodotti dalle banche dati creditizie, le quali continuano ad evidenziare un aumento dei c.d. NPLs causato, secondo la tesi degli autori, non necessariamente da una poco attenta politica di concessione del credito da parte dell'intermediario, quanto piuttosto – almeno nella maggior parte dei casi - dal limite intrinseco, sopra richiamato, del modello di valutazione adottato dagli stessi intermediari finanziari.

Di seguito si elencano alcune indicazioni sui modelli matematici/statistici di Credit Scoring, Credit Rating, Credit Risk Evaluation/Management.

E' noto che ai fini della concessione del credito, per un intermediario bancario o finanziario risulta indispensabile stimare degli indicatori che meglio rappresentano quantitativamente il grado di solvibilità del richiedente.

Tra questi indicatori, gli autori annoverano: *Default Risk Indicator* (rischio che un affidato, un emittente ovvero una controparte, non onori i suoi obblighi di pagamento); *Credit Default Risk* (rischio di default, ovvero di riduzione del valore di mercato causata da cambiamenti del merito creditizio dell'emittente, dell'affidato, ovvero della controparte); *Liquidity Risk Indicator*; *Esposizioni in default del richiedente* (sofferenze, incagli, crediti ristrutturati, crediti scaduti e/o sconfinati); *Arrival Risk Indicator* (incertezza derivante dalla manifestazione o meno del default); Probabilità di Default (PD); *Timing Risk Indicator* (incertezza connessa al tempo di manifestazione del default); *Recovery Risk Indicator* (severità delle perdite in caso di default); *Market Risk Indicator* (cambiamenti nel valore di mercato di uno strumento dovuti a cambiamento del merito creditizio o delle condizioni di mercato); *Default Correlation Risk Indicator* (rischio che più emittenti/affidati/controparti vadano in default simultaneamente ovvero in sequenza), etc.

Per analizzare i suddetti elementi, gli intermediari elaborano (o fanno elaborare da terzi) modelli matematici-statistici, meglio noti come Sistemi di rating. Un **sistema di rating** puo' definirsi come un “*insieme strutturato delle metodologie, dei processi organizzativi e di controllo, dei dati finanziari e delle modalità di organizzazione delle basi dati che consente la raccolta e l'ela-*

*borazione delle informazioni rilevanti per la formulazione di valutazioni sintetiche della rischiosità di una controparte e delle singole operazioni creditizie*". I sistemi di rating basano le loro valutazioni su molteplici variabili economiche e finanziarie connesse matematicamente e statisticamente al rischio di credito, tra le quali appare importante menzionare:

- La probabilità di default (PD);
- Il tasso di perdita in caso di default (TP);
- L'esposizione al momento del default (ED);
- La scadenza effettiva (SE).

Attraverso il sistema di rating, l'intermediario bancario o finanziario attribuisce al contraente un grado interno di merito creditizio (rating), ordinando le controparti in relazione alla loro rischiosità. Inoltre, perviene a una stima delle componenti di rischio, la quale permette, alla fine, una quantificazione numerica del rischio solvibilità del richiedente (Score).

Il rating rappresenta la valutazione, riferita a un dato orizzonte temporale, effettuata sulla base di tutte le informazioni ragionevolmente accessibili – di natura sia quantitativa sia qualitativa – ed espressa mediante una classificazione su scala ordinale, della capacità di un soggetto affidato o che richiede credito di onorare le obbligazioni contrattuali. Ad ogni classe di rating è poi associata una probabilità di default. Le classi di rating sono ordinate in funzione del rischio creditizio: muovendo da una classe meno rischiosa a una più rischiosa la probabilità che i debitori risultino in default è crescente. Gli accordi noti sotto lo pseudonimo di Basilea I, II, o III, forniscono ulteriori direttive agli intermediari bancari in riferimento ai requisiti patrimoniali, in base ai quali, questi ultimi devono accantonare quote di capitale proporzionate al rischio assunto, valutato attraverso lo strumento del rating.

In realtà, per il calcolo della probabilità di default (PD), le banche adottano poi dei modelli di scoring che hanno alla base dei sistemi matematici-stocastici, dunque, basati su stime prospettive e probabilità associate. L'obiettivo è quello di ottenere un indicatore numerico (score) che differenzi in modo significativo richiedenti "normali" da quelli "rischiosi" e che permetta,

altresi', di ottenere una graduazione ottimale del livello di rischio associato ad ogni tipologia di richiedente. Il modello può così schematizzarsi ( $C_s$ =credit score):

$$C_s = \varphi(TP, ED, SE, PD, \dots)$$

Il modello  $\varphi$ , una volta definito, deve essere validato su campioni statistici distinti e senza overlap rispetto a quelli adottati per la sua formazione e/o per la fase di learning e tuning dello stesso.

I principali approcci algoritmici adottati dagli intermediari per il credit scoring, sono prevalentemente raggruppabili nelle seguenti classi operative: **L'approccio univariato** (Discriminare le società sane da quelle deboli in base all'analisi singola ed indipendente degli indicatori finanziari, di solito, indicatori della "dimensione"/"composizione" del finanziamento richiesto, indicatori di tensione finanziaria, indicatori desumibili dal bilancio societario, indicatori quali il rapporto tra cash flow e debiti totali, etc...), **L'approccio multivariato** (Uso combinato delle variabili economico-finanziarie dell'impresa: redditività, struttura finanziaria, liquidità, etc.). L'approccio multivariato include l'analisi discriminante lineare (Fisher, 1936) tra le tecniche storicamente più utilizzate, ed il **modello logistico**. Quest'ultimo consiste matematicamente, in un modello che ha come dipendente una variabile dicotomica, che descrive l'appartenenza all'insieme delle società sane o anomale (0=sane, 1=rischiose), mentre gli indicatori di bilancio sono le variabili indipendenti). Questo modello può essere così schematizzato:

$$p = \varphi(\vartheta + \beta\pi) = \int_{-\infty}^{\vartheta + \beta\pi} \frac{f(\alpha) d\alpha}{e^\alpha} = \frac{1}{1 + e^{-(\vartheta + \beta\pi)}} ; f(\alpha) = \frac{e^{-\alpha}}{(1 + e^{-\alpha})^2}$$

Dove  $p$  indica, appunto, la probabilità di insolvenza, mentre  $\pi$  indica il vettore delle variabili indipendenti mentre con  $(\vartheta, \beta)$  ab-

biamo indicato i coefficienti del modello, da stimare con opportune tecniche di regressione lineare. La funzione  $f(\alpha)$  è la densità logistica mentre, ovviamente,  $\varphi(*)$  rappresenta la funzione standard cumulativa logistica. Il modello stabilisce, dunque, la forma della distribuzione della probabilità d'insolvenza, con tutti i vantaggi che ne derivano.

I modelli così costruiti sono validati in performance, valutando l'**Accuracy ratio** ossia la capacità del modello di individuare i richiedenti "deboli" (ossia quelli con rischio di credito medio-alto), nelle classi peggiori di score. Un modello efficace tenderà a concentrare la maggior parte dei default entro i lower bound della distribuzione dello score. A volte questi modelli necessitano di metodi di calibrazione ed aggiustamento parametrico-adattativo dei valori di cut-off discriminanti.

Ecco che, a parere degli autori, gli intermediari finanziari potrebbero ricavare grandi vantaggi in termini di accuratezza valutativa/predittiva sull'affidabilità connessa al rischio di credito, affiancando ai modelli oggi utilizzati, almeno questa la proposta, tecniche di valutazione prospettica (*Forecasting Models*) del rischio di default del richiedente (consumatori, società, PMI, consorzi, etc.), basate su approcci di *EAV (Asset Value Estimation)*, *Default Distance Model (KMV)*, *Bernoulli Mixture Models for Default Evaluation*, etc.

Va comunque detto che i suddetti approcci, sebbene siano abbastanza consolidati, sono tuttavia affetti da notevoli issues legate all'assenza di una legge matematica di correlazione nota (ed in forma chiusa) tra il modello adottato (parametri, strutturazione etc..) ed il fenomeno reale, cioè la stima del rischio di credito. Per tali ragioni, gli algoritmi sopra richiamati sono di fatto basati su modelli matematico-statistici.

In questo panorama non certo semplice, da entrambi i punti di vista, giuridico e matematico, a parere di chi scrive, potrà certamente essere d'ausilio l'approccio matematico combinato non già alla statistica, come sopra illustrato, quanto piuttosto alle moderne tecniche di Machine Learning e Deep Learning.

Numerosi studi hanno infatti mostrato le potenzialità insite nell'utilizzo dei **Sistemi di Intelligenza Artificiale (IA)** per il learning (apprendimento) delle correlazioni implicite in fen-

meni naturali e sociali. Sul punto, con il termine “IA” si definiranno d’ora in poi tutti i sistemi biologicamente-ispirati, cioè l’insieme degli algoritmi e dei modelli matematici il cui obiettivo è quello di risolvere problemi complessi mediante approcci che riproducono le funzionalità di un sistema biologico. I sistemi biologici che di sovente troviamo alla base dei sistemi artificialmente “modellizzati”, sono in prevalenza riferibili al cervello umano, il quale notoriamente possiede architettura e potenzialità di apprendimento che ben si adattano a queste particolari attività.

Ebbene, nel tentativo di rappresentare artificialmente le varie funzionalità della nostra corteccia cerebrale, gli studiosi, nel tempo, hanno messo a punto numerosi sistemi bio-ispirati, in grado di emulare più o meno efficacemente, i processi di apprendimento cognitivo delle nostre reti neuronali amplificandone, in taluni casi, le funzionalità. I sistemi di “IA” si basano, pertanto, sul concetto di neurone artificiale, che riproduce - seppur con particolari limitazioni - le funzionalità del neurone biologico, pilastro fondamentale della nostra capacità cognitiva.

Dunque, in parallelo al progresso medico-neurologico di understanding del nostro cervello e delle sue molteplici funzionalità correlate alle varie aree neuronali di cui esso risulta composto, gli studiosi hanno creato dei modelli matematici non lineari in grado di emulare le suddette funzionalità neuronali, connotando, per questi sistemi algoritmici, il termine di uso comune: **Reti Neurali Artificiali (RNA)**. Questi sistemi, pertanto, sono in grado di comprendere e “modellizzare” efficacemente le leggi che si celano dietro fenomeni complessi, sfruttando dei modelli di apprendimento euristici-distribuiti, simili a quelli che il nostro cervello elabora ogni qual volta si trova ad affrontare una problematica di qualsivoglia natura e dunque sono conseguentemente in grado di “modellizzare” matematicamente fenomeni di varia natura (finanziari, sociali, medicali, etc..) che altrimenti non troverebbero “terreno facile” in sede di analisi, attraverso le classiche metodologie di modellistica matematica. Oggi esistono moltissime strutturazioni di RNA, tra le quali, gli autori ritengono doveroso menzionare: Le *MLP(Multi-Layer Perceptron)*, le *SOM(Self Organizing Maps)*, *Reti di Hopfield*, *ART Neural Networks*, *RBM*, etc..

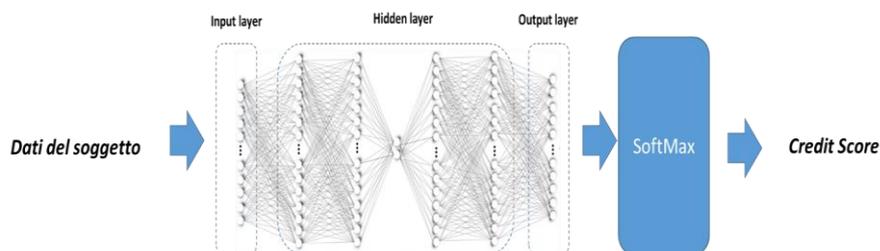
Ciascuna RNA e' deputata alla riproducibilita' artificiale di una precisa funzionalita' del nostro cervello: gli MLPs servono a creare modelli matematici di fenomeni non lineari dei quali non esiste modello matematico in forma chiusa (apprendimento percettivo), le SOM servono a classificare piu' oggetti appartenenti a medesime categorie (neural clustering), etc...

Queste reti necessitano di potenti algoritmi di apprendimento, basati su casistiche reali (Training set), che permettano loro di comprendere da detti esempi (opportunamente selezionati e catalogati con i relativi Target), la legge matematica insita nel fenomeno analizzato. Il più famoso algoritmo di apprendimento e' certamente il c.d. "**Error Back Propagation**", il quale nelle sue moltissime varianti e' in grado di far apprendere efficacemente alla RNA (tipicamente un MLPs) il modello matematico di un qualsiasi fenomeno di cui è noto un adeguato training set. Accanto a questi sistemi di "IA", occorre altresì menzionare: I **sistemi Fuzzy**, che emulano il sistema di valutazione "sfumato" umano differente da quello binario-booleano dei calcolatori; gli **algoritmi genetici o evolutivi**, i quali "modellizzano" i processi genetici per ottimizzare e risolvere problematiche classiche in svariati ambiti applicativi, etc...

Recenti studi hanno migliorato sensibilmente le capacita' dei citati strumenti, rendendoli ancora più simili al corrispondente biologico, creando delle aree di ricerca che, nell'ambito della bio-ingegneria e della matematica applicata, risultano essere quelle di maggior interesse scientifico: ci riferiamo, appunto, al **Machine Learning ed al Deep Learning**.

Gli studi di Machine Learning e Deep Learning hanno prodotto, negli ultimi anni, la creazione di sistemi matematici bio-ispirati con performance di altissimo livello in moltissimi campi applicativi, tra i quali appunto quello finanziario. Nell'ambito dei menzionati sistemi vale la pena ricordare: Gli "*Stacked AutoEncoder*" (SAE), le "*Convolutional Neural Networks*" (CNNs), i metodi "*Support Vector Machine*" (SVM), e così via. La complessità algoritmica e matematica nonché la potenzialità di apprendimento dei nuovi sistemi di "IA" è di gran lunga superiore alle precedenti RNA, tanto che quest'ultimi sono stati applicati con successo nella risoluzione di problematiche non altrimenti risolvibili. Il lettore che vorrà approfondire

la tematica, avrà modo di reperire nella sezione bibliografica del presente lavoro, alcuni riferimenti alle tematiche di Machine e Deep learning. Fatta questa doverosa, ancorché necessariamente non breve, premessa, nell'ambito che qui interessa, si evidenzia che numerosi studi hanno mostrato l'indubbia potenzialità dei sistemi di "Machine e Deep Learning" nella valutazione del rischio creditizio, mediante l'adozione di algoritmi di apprendimento opportunamente progettati, i quali si differenziano sensibilmente dai modelli matematici classici sinora utilizzati dagli intermediari bancari e finanziari (modelli di Credit Scoring, Credit Rating e Credit Risk Evaluation, sopra richiamati). Un sistema di "Machine o Deep Learning", per l'analisi del rischio creditizio può essere così schematizzato:



**Fig. 1:** Overview di un sistema SAEs-SML per il Credit Scoring

Nello schema riprodotto in Fig. 1 riportiamo una classica struttura di Deep Learning basata sull'utilizzo di SAEs con SoftMax Layer (SAEs-SML), per la classificazione del rischio creditizio sulla base dei dati del soggetto richiedente il credito, mediante un modello matematico non lineare di seguito riportato (solo a beneficio del lettore, riportiamo una notevole esemplificazione del modello di un  $M \times N$  SAEs-SML):

$$y_k = g \left( \sum_{j=1}^M w_{kj} h \left( \sum_{i=1}^N w_{ji} x_i \right) \right)$$

Dove con  $y_k$  indichiamo il *credit score* che si vuole stimare, con  $w_{ij/kl}$  indichiamo il valore delle connessioni sinaptiche (analogo matematico delle nostre sinapsi neuronali) che servono a

mappare matematicamente (funzione “g” ed “h”) i valori di ingresso  $x_i$  ossia i dati creditizi (e non solo) del soggetto richiedente.

Attraverso un apprendimento c.d. “supervisionato” (ossia con un training set classificato e di cui conosciamo l’esito di ogni valutazione), i suddetti sistemi saranno in grado di creare una rappresentazione matematica interna, solitamente denominata “latente” che, ove opportunamente “addestrata”, risulterà essere in grado di “modellizzare” il legame tra i dati del soggetto in ingresso (età, informazioni creditizie, dati bilanci –nel caso di società -, movimenti contabili bancari, etc..) e il suo rischio creditizio; dunque, sarà possibile ottenere dati analitici sul rischio di credito di un soggetto mediante un modello euristico-distribuito della legge matematica, ad oggi sconosciuta in forma chiusa, che lega dati del richiedente e rischio di credito.

Si ribadisce ancora una volta, tuttavia, che per ottenere quanto sperato – ossia un sistema di credit scoring robusto che dia un valore aggiunto ai metodi matematici classici sino ad oggi utilizzati - il suddetto modello necessita di una fase propedeutica di learning, che si avvarrà, come detto, della conoscenza di pregresse posizioni già adeguatamente classificate. I dati classificati (Training set), possono e devono includere dati e riferimenti del soggetto richiedente il credito, dati che oggi spesso vengono ignorati dai modelli classici di credit scoring e ciò per la semplice ragione, come detto, che solo questi nuovi sistemi hanno la capacità di estrapolare “correlazioni latenti” di fatto sconosciute o non ipotizzate in riferimento, nel caso di specie, al rischio di credito.

Per comprendere le potenzialità predittive di questi sistemi rispetto a quelli attualmente utilizzati dagli intermediari, gli autori richiamano i risultati di uno studio presentato ad una recente conferenza (*IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*) intitolato “**Credit Risk Evaluation with Extreme Learning Machine**”. Ebbene, valutando il credit risk in differenti aree geografiche (Australia, e Germania), attraverso dei modelli di Machine e Deep Learning (Kernel based ELM, SVM) **gli autori sono stati in grado di stimare il rischio di credito con un Accuracy Rate (Indicatore di Accuratezza e benchmark di confronto dei metodi di valutazione del rischio**

**di credito) che giunge, in alcune simulazioni, a superare il 90% di scoring corretto.** Questo dato rende manifeste, al di là di ogni ragionevole dubbio, le potenzialità di questi nuovi sistemi i quali potrebbero – ad adempio – essere utilizzati, in un primo tempo anche solo in affiancamento ai modelli analitici classici sopra richiamati, al fine di incrementare la robustezza di valutazione del “complessivo” modello di credit scoring adottato dagli intermediari.

10. A chiusura della trattazione sino a qui presentata, va doverosamente rilevato che le applicazioni delle scienze matematiche funzionali alle scienze giuridiche non si limitano certamente al diritto bancario o finanziario, ovvero alla progettazione di sistemi avanzati per la stima prospettica del rischio di default di una società o del rischio di credito. Le applicazioni della modellistica matematica, nella sua parte attuativa, dunque ci riferiamo alla c.d. “matematica applicata”, spaziano, invece, ad esempio, dalla **creazione di sistemi di misurazione e stima prospettica degli inquinanti, alla creazione di algoritmi di analisi genetica efficienti e veloci, a tecniche di predizione del rischio di reiterazione dei reati, ai modelli di stima prospettica delle serie finanziarie che ben possono applicarsi sia al contenzioso - per valutare il benchmark di stima del titolo ex-ante - che all’analisi finanziaria pura**, tanto che ad oggi, sono numerosi i fondi di investimento o gli Hedge Funds, che si affidano agli algoritmi matematici basati su approcci di Machine e Deep Learning, per la progettazione dei loro Trading System.

L’approccio “matematico” al diritto diviene poi senz’altro di grande interesse, anche alla luce della riforma del diritto fallimentare, che nella sua stesura – per il vero ancora in corso di definizione -, ha inteso affidare a modelli predittivi della crisi, nutrite conseguenze giuridiche per le imprese. Modelli predittivi che per la loro realizzazione, dovranno certamente prevedere l’impiego di competenze sinergiche di matematici e giuristi.

E ancora. Recentemente sono state costituite società, che attraverso modelli di Machine Learning/Deep Learning, opportunamente progettati, riescono a stimare con notevole precisione e robustezza, la probabilità di vittoria, ovvero di soccombenza in un dato contenzioso giudiziario, di qualsivoglia natura e grado, analizzando in ingresso: i dati del procedimento, il tribunale

competente, i precedenti specifici, i dati della controparte, i dati documentali etc.

**In conclusione, della trattazione operata sui temi delle possibili correlazioni tra diritto e matematica, va pertanto confermato – a parere degli autori - il ruolo talvolta decisivo che la scienza matematica può offrire al diritto sia in sede stragiudiziale, che giudiziale.** Con il formulato auspicio - con riferimento a tale ultimo ambito e alle materie di interesse - che attraverso la stretta collaborazione tra le due scienze e un più intenso ricorso in ambito giudiziario delle leggi fondamentali del diritto e della matematica, si possa contribuire a raggiungere una maggiore omogeneità e oggettività di risultati tra i vari tribunali italiani.

A beneficio di tutti gli utenti e operatori di settore e - last but not least -, della sempre agognata “certezza del Diritto”.

## 11. Bibliografia

Francesco Rundo, “*Ammortamento c.d. “alla francese” e presunto effetto anatocistico*”, Altalex, 22.02.2016;

Francesco Rundo, “*Matematica applicata al contenzioso bancario: L’usura Contrattuale. Teoria dei Giochi e Matematica Finanziaria per definire una strategia legale efficiente ed una valutazione scientificamente accurata dell’usura nei contratti bancari*”, “Il Caso.it” in data 19.11.2017;

Francesco Rundo, Sabrina Conoci, Sebastiano Battiato, Agatino Luigi Di Stallo, “*Analisi Vibrazionale Avanzata(AVA): Una Nuova Piattaforma Algoritmica-Matematica per un innovativo paradigma per l’esecuzione di intercettazioni ambientali*”, “Sicurezza e Giustizia”, I Trimestre, 2018;

Francesco Rundo, Sabrina Conoci, “*Proposta di una piattaforma avanzata per il monitoraggio e la stima prospettica di inquinamento nei centri urbani Normativa, tecnologia e vantaggi nella repressione delle cause di inquinamento*”, – “Sicurezza e Giustizia”, IV Trimestre, 2017;

Francesco Rundo, Sabrina Conoci, “*Tecnologia “blockchain”: dagli smart contracts allo smart driving. Spunti di riflessione sulla normativa e sulla sostenibilità tecnologica*” – “Sicurezza e Giustizia”, III Trimestre, 2017;

Francesco Rundo, Sabrina Conoci, Salvatore Petralia, “*Decreto “sicurezza delle città”: un esempio concreto di sicurezza integrata dei centri urbani*” – “Sicurezza e Giustizia”, II Trimestre, 2017;

Francesco Rundo, Sebastiano Battiato, Edoardo Tusa, “**Medical Image Enhancement nei Procedimenti Medico-Legali**” – “Sicurezza e Giustizia” - N. III\_MMXXVI, marzo 2016;

Sabrina Conoci, Salvatore Petralia, Francesco Rundo, Sebastiano Battiato, “**Sistemi ‘Point of Care’ per le indagini genetiche in ambito forense**”, – “Sicurezza e Giustizia”, I Trimestre, 2017;

Francesco Rundo, Stefano Maugeri, “**Analisi Giurimetrica dei Contratti Bancari: Profili di illegittimità in ambito civile e penale**” – “Sicurezza e Giustizia” N. II\_MMXXVI, 2016;

Bishop, C. M. *Pattern Recognition and Machine Learning*. Springer, New York, NY, 2006;

Hongming Zhou, Yuan Lan, Yeng Chai Soh, Guang-Bin Huang, Rui Zhang, “**Credit Risk Evaluation with Extreme Learning Machine**”, IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics October 14-17, 2012, COEX, Seoul, Korea;

A. Annibali, “**Le “strane formule della banca d’Italia in tema di usura**”, Convegno “Usura Bancaria – ASSOCTU, Roma 08.11.2017;

A. Annibali, “**Ammortamento di mutui alla francese nel regime dell’interesse semplice**”, Convegno ASSOCTU, Roma 22.09.2017;

Bortot P., et al (1993), *Matematica Finanziaria*, Monduzzi Editore, Bologna;

Cacciatesta F., *Lezioni di Matematica Finanziaria classica e moderna*, G. Giappichelli Editore, Torino;

Levi E. *Corso di matematica finanziaria e attuariale*, Giuffrè Editore, Milano;

Olivieri G. “**Alcune considerazioni di un teorema sulla unicità del tasso interno di rendimento di progetti di investimento o di finanziamento**” *Giornale dell’Istituto Italiano degli Attuari*, nn. 1-2, Roma;

Carl J. Norstrom, *A Sufficient Condition for a Uniform Nonnegative Internal Rate of Return*, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* (June 1972), pp. 1835-1839;

Morelli C., “**Giustizia predittiva: in Francia online la prima piattaforma europea**”, *Altalex* 03.04.2017.